



Aula 01

Lei dos senos e lei dos cossenos

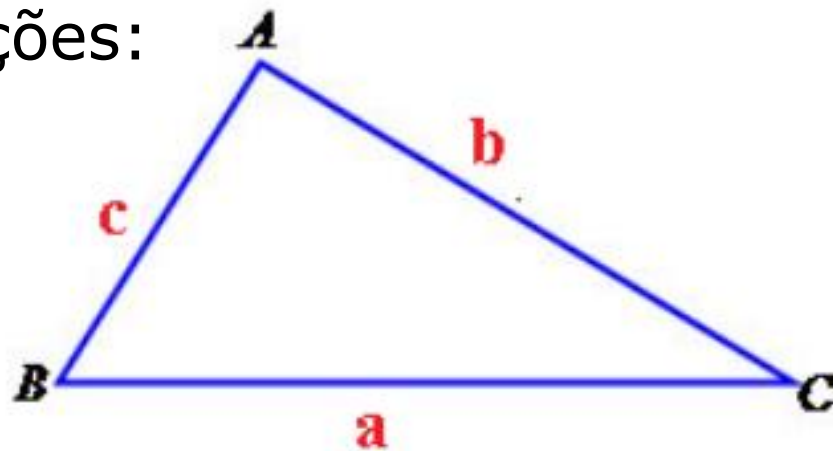
Samuel Oliveira

Lei dos Senos

A **Lei dos Senos** determina que num triângulo qualquer, a relação do seno de um ângulo é sempre proporcional à medida do lado oposto a esse ângulo.

Esse teorema demonstra que num mesmo triângulo a razão entre o valor de um lado e o seno de seu ângulo oposto será sempre **constante**.

Assim, para um triângulo ABC de lados a , b , c , a Lei dos Senos admite as seguintes relações:

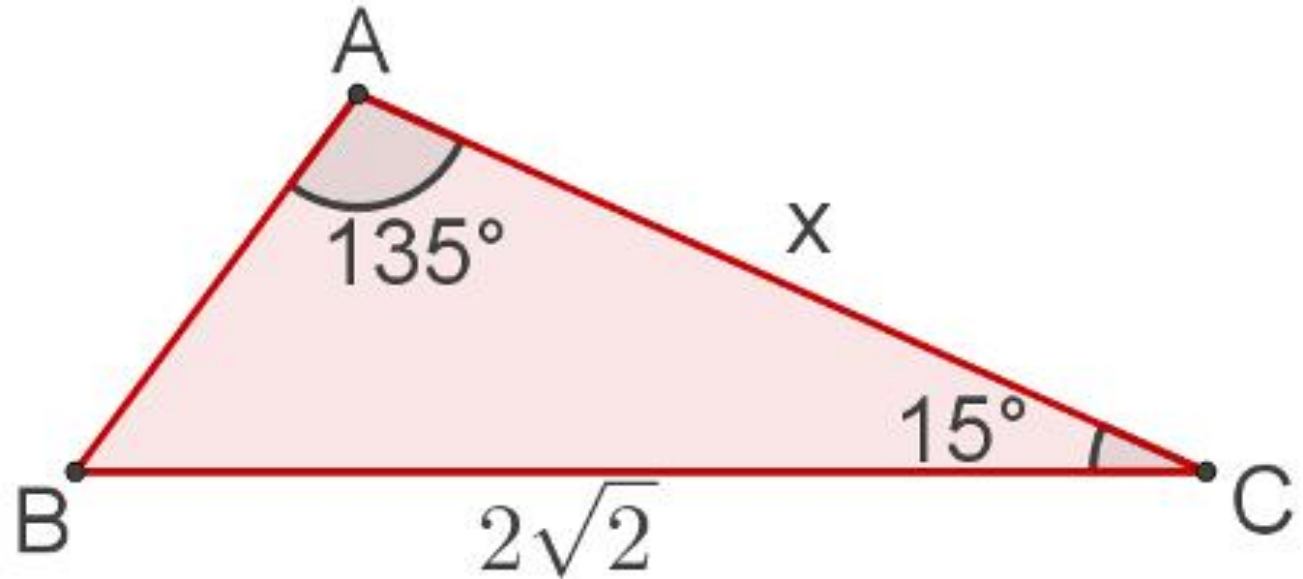


$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

Exemplos:

1. No triângulo a seguir, qual é a medida do segmento AC, destacada pela letra x, dado que essas medidas estão em centímetros?

- a) 2 cm
- b) $2\sqrt{3}$ cm
- c) $3\sqrt{2}$ cm
- d) $3\sqrt{3}$ cm
- e) $4\sqrt{2}$ cm



Resolução:

Observe que x é oposto ao ângulo B . Para descobrir sua medida, basta fazer: $135^\circ + 15^\circ + B = 180^\circ$. Nesse caso, $B = 30^\circ$. Usando a lei dos cossenos, teremos:

$$\frac{x}{\text{sen}30} = \frac{2\sqrt{2}}{\text{sen}135}$$

$$x\text{sen}45 = 2\sqrt{2}\text{sen}30$$

$$x\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 2$$

Alternativa: A

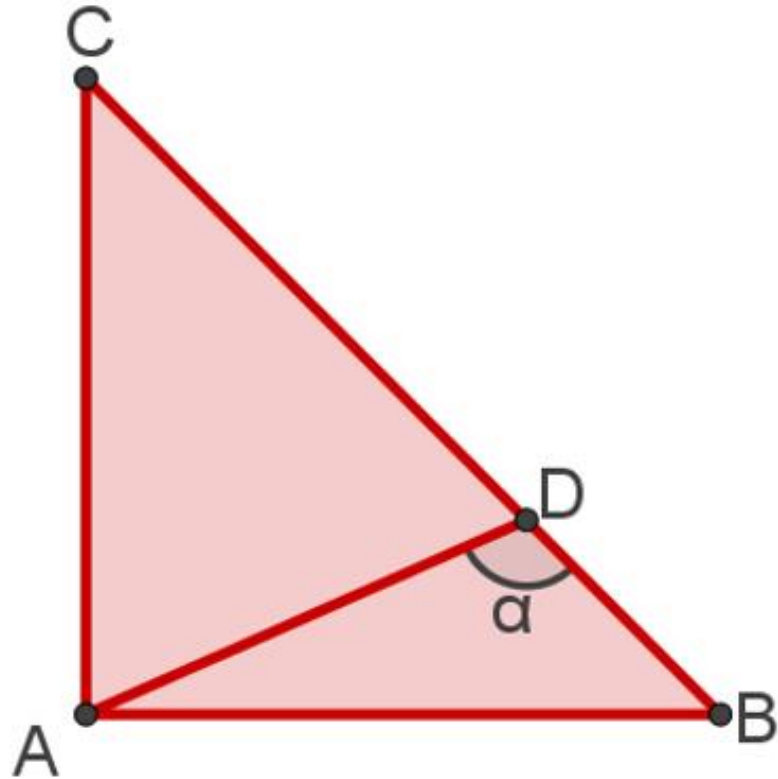
2. (UFU-MG) Considere o triângulo retângulo a seguir. Sabendo-se que $\alpha = 120^\circ$, $AB = AC = 1$ cm, então AD é igual a:

a) $\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ cm}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$

c) $\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ cm}$

d) $\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ cm}$



Resolução:

Observe que o triângulo é isósceles, pois $AB = AC = 1 \text{ cm}$. Portanto, os ângulos B e C são iguais a 45° , uma vez que eles são iguais porque são os ângulos da base do triângulo isósceles. Considerando apenas o triângulo ABD, temos:

$$\frac{1}{\text{sen}120} = \frac{x}{\text{sen}45}$$

$$\text{sen}45 = x \cdot \text{sen}120$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = x \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{2} = x\sqrt{3}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

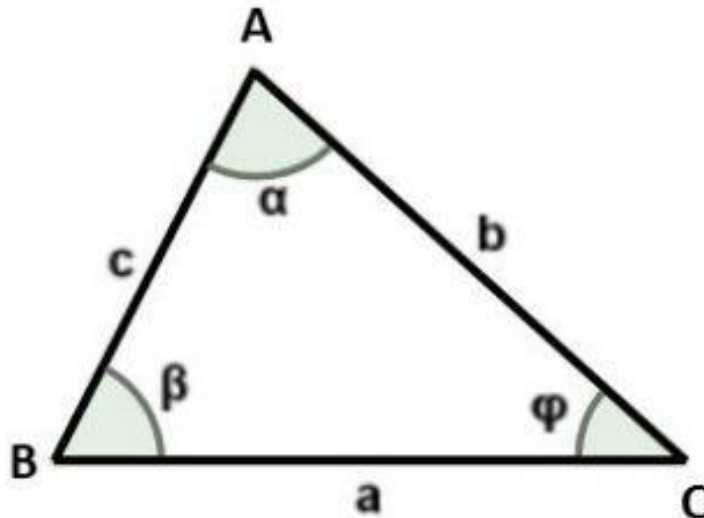
$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Alternativa: A

Lei dos Cossenos

A **Lei dos Cossenos** é utilizada para calcular a medida de um lado ou de um ângulo desconhecido de um triângulo qualquer, conhecendo suas outras medidas.

"Em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados corresponde à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo entre eles."



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c. \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c. \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b. \cos \varphi$$

Exemplos:

1. (Unifor-CE) Um terreno de forma triangular tem frente de 10 m e 20 m, em ruas que formam, entre si, um ângulo de 120° . A medida do terceiro lado do terreno, em metros, é:

a) $10\sqrt{5}$

b) $10\sqrt{6}$

c) $10\sqrt{7}$

d) 26

e) $20\sqrt{2}$

Resolução:

Lembrete: $\cos 120^\circ = -1/2$.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$$

$$a^2 = (10)^2 + (20)^2 - 2.10.20.(-1/2)$$

$$a^2 = 100 + 400 + 200$$

$$a^2 = 700$$

$$a = 10\sqrt{7}$$

Resposta: letra A

2. (UF-Juiz de Fora) Dois lados de um triângulo medem 8 m e 10 m e formam um ângulo de 60° . O terceiro lado desse triângulo mede:

a) $2\sqrt{21}$ m

b) $2\sqrt{31}$ m

c) $2\sqrt{41}$ m

d) $2\sqrt{51}$ m

e) $2\sqrt{61}$ m

Resolução:

$$x^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 64 + 100 - 2 \cdot 80 \cdot (1/2)$$

$$x^2 = 164 - 2 \cdot 40$$

$$x^2 = 164 - 80$$

$$x^2 = 84$$

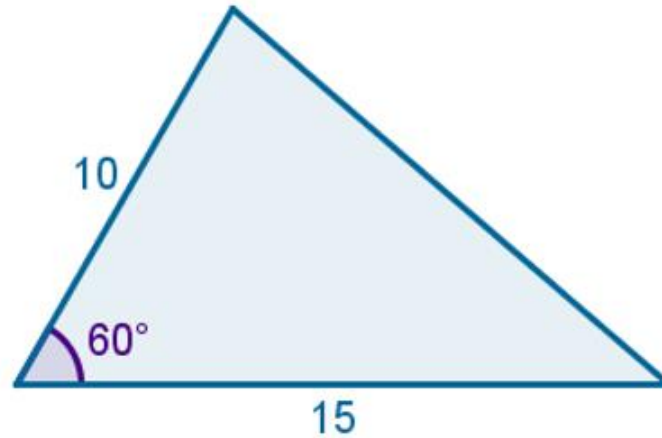
$$x = 2\sqrt{21}$$

O terceiro lado desse triângulo mede $2\sqrt{21}$.

Gabarito: Letra A.

EXERCÍCIOS:

01) (UF- Viçosa) Dois lados de um terreno de forma triangular medem 15 m e 10 m, formando um ângulo de 60° , conforme a figura



O comprimento do muro necessário para cercar o terreno, em metros, é:

- a) $5(5 + \sqrt{15})$
- b) $5(5 + \sqrt{5})$
- c) $5(5 + \sqrt{13})$
- d) $5(5 + \sqrt{11})$
- e) $5(5 + \sqrt{7})$

Resolução:

O comprimento do muro necessário para cercar o terreno é igual ao seu perímetro. Para esse cálculo, basta somar os comprimentos do lado do triângulo.

$$10 + 15 + x$$

O valor de x pode ser encontrado por meio da lei dos cossenos:

$$x^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 100 + 225 - 2 \cdot 150 \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 325 - 300 \cdot 1/2$$

$$x^2 = 325 - 150$$

$$x^2 = 175$$

$$x = \sqrt{175}$$

$$x = 5\sqrt{7}$$

Logo, a soma que representa o perímetro desse triângulo é: $25 + 5\sqrt{7} = 5(5 + \sqrt{7})$

Gabarito: Letra E.

02) Qual é a medida do lado oposto ao ângulo de 30° , em um triângulo, sabendo que os outros dois lados medem 2 e $\sqrt{3}$?

- a) 1
- b) 1,5
- c) 2
- d) 2,5
- e) 3

Resolução:

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

$$x^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30$$

$$x^2 = 4 + 3 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2$$

$$x^2 = 7 - 4 \cdot 3/2$$

$$x^2 = 7 - 12/2$$

$$x^2 = 7 - 6$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1$$

O lado oposto ao ângulo de 30° mede 1.

Gabarito: Letra A.

03)(UFPR) Calcule o seno do maior ângulo de um triângulo cujos lados medem 4, 6 e 8 metros.

a) $\sqrt{15}/4$

b) $1/4$

c) $1/2$

d) $\sqrt{10}/4$

e) $\sqrt{3}/2$

Resolução:

Pela lei dos cossenos, temos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\beta$$

$$64 = 16 + 36 - 48.\cos\beta$$

$$\cos\beta = -12/48$$

$$\cos\beta = -1/4$$

$$\text{Mas, } \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

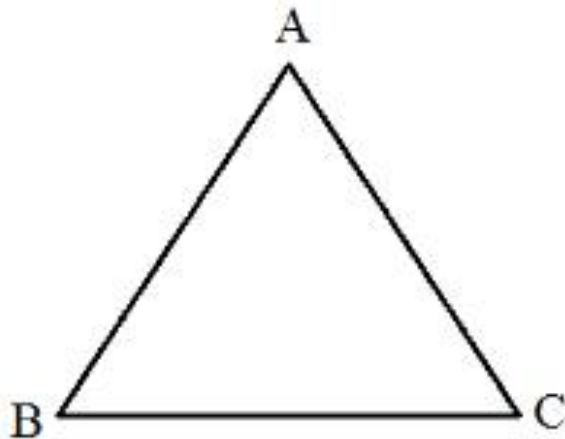
$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$$

$$\sin^2\beta = 1 - 1/16$$

$$\sin\beta = \sqrt{15}/4$$

Resposta: letra a

04) (UFRS) No triângulo representado na figura abaixo, AB e AC têm a mesma medida, e a altura relativa ao lado BC é igual a $\frac{2}{3}$ da medida de BC.



Com base nesses dados, o cosseno do ângulo $\widehat{CAB}$ é:

a) $\frac{7}{25}$

b) $\frac{7}{20}$

c) $\frac{4}{5}$

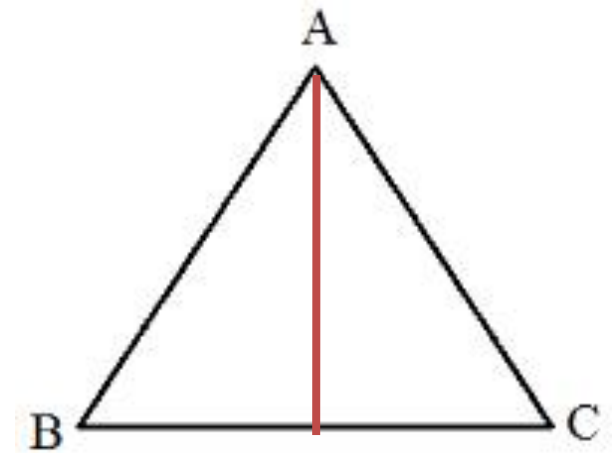
d) $\frac{5}{7}$

e) $\frac{5}{6}$

Resolução:

O primeiro passo é descobrir o valor do comprimento de BC. Chamaremos os comprimentos de AB e AC de ***a*** e o de BC de ***b***.

Se dividirmos o triângulo na metade conseguiremos dois triângulos retângulos. Usaremos o Teorema de Pitágoras num deles.



$$a^2 = \left(\frac{2b}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{4b^2}{9} + \frac{b^2}{4} \Leftrightarrow a^2 = \frac{16b^2 + 9b^2}{36} \Leftrightarrow a^2 = \frac{25}{36}b^2 \Leftrightarrow a = \frac{5}{6}b$$

Agora, Usando a lei dos cossenos, temos:

$$b^2 = \left(\frac{5b}{6}\right)^2 + \left(\frac{5b}{6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5b}{6} \cdot \frac{5b}{6} \cdot \cos(A) \Leftrightarrow$$

$$36b^2 = 50b^2 - 50b^2 \cos(A) \Leftrightarrow$$

$$\cos A = \frac{14b^2}{50b^2} = \frac{7}{25}$$

05) (UECE) O menor lado de um paralelogramo, cujas diagonais medem $8\sqrt{2}$ m e 10 m e formam entre si um ângulo de 45° , mede:

a) $\sqrt{13}$ m

b) $\sqrt{17}$ m

c) $13\sqrt{2} / 4$ m

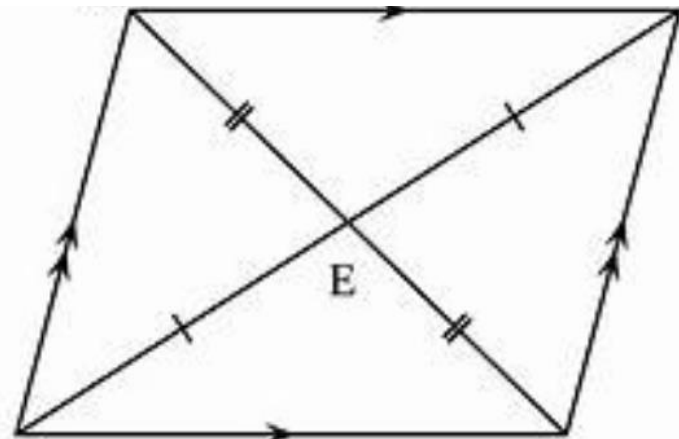
d) $17\sqrt{2} / 5$ m

Resolução:

As diagonais se cruzam no ponto médio,

$$8\sqrt{2} \text{ m} \Rightarrow 4\sqrt{2} \text{ m}$$

$$10 \text{ m} \Rightarrow 5 \text{ m}$$



$$x^2 = (4\sqrt{2})^2 + 5^2 - 2 \cdot (4\sqrt{2})(5)(\cos 45^\circ)$$

$$x^2 = 16(2) + 25 - (40\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$x^2 = 32 + 25 - \left(\frac{40 \cdot \sqrt{4}}{2}\right)$$

$$x^2 = 57 - \frac{40 \cdot 2}{2}$$

$$x^2 = 57 - 40$$

$$x^2 = 17$$

$$x = \pm\sqrt{17}$$

como não existe medida negativa

$$x = \sqrt{17} \text{ m} \mapsto \text{letra B}$$

06)(UFSCar) Se os lados de um triângulo medem x , $x + 1$ e $x + 2$, então, para qualquer x real e maior que 1, o cosseno do maior ângulo interno desse triângulo é igual a:

a) $x / x + 1$

b) $x / x + 2$

c) $x + 1 / x + 2$

d) $x - 2 / 3x$

e) $x - 3 / 2x$

Resolução:

Se x , $x + 1$ e $x + 2$ são as medidas dos lados de um triângulo, para qualquer x real e maior que 1, o maior lado é o de medida $x + 2$. Se θ é o ângulo oposto ao maior lado do triângulo, pela lei dos cossenos, temos:

$$\begin{aligned}(x + 2)^2 &= (x + 1)^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot (x + 1) \cdot \cos \theta \\ x^2 + 4x + 4 &= x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x(x + 1) \cdot \cos \theta \\ 2 \cdot x \cdot (x + 1) \cdot \cos \theta &= x^2 - 2x - 3\end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x(x + 1)} = \frac{x^2 - 3x + x - 3}{2x(x + 1)} = \frac{x(x - 3) + 1(x - 3)}{2x(x + 1)} =$$

$$\cos \theta = \frac{(x - 3)(x + 1)}{2x(x + 1)} = \frac{x - 3}{2x}$$

Resposta: Letra E

Sugestão de Atividade:

Módulo 1

Páginas: 28 a 30

- Questões: 1, 2, 4 e 7

Página: 31

- Questões: 2 a 4